

## 关于尺寸分布：云雀馅饼的故事

杨正伟

(川北医学院 形态定量研究室, 四川 南充市 637007)

数学形态学的鼻祖 J. Serra (法国) 在《图像分析与数学形态学》一书中的第 G.12 章节“Size distribution weighted in volume and in number” (体积和数目加权的尺寸分布), 是以下面的故事开头的<sup>[1]</sup>。

Recall the story of the butcher who sells lark pie. Lark meat being expensive, he decides to mix it with horse meat, and advertises “Excellent mixed pie: 50 per cent lark, 50 per cent horse”. A few days later, a customer says: “It’s curious that your pie does not taste very much of lark”. “Strange indeed, Madam, but I guarantee you the proportion: one horse to one lark” ...

(参考译文) 回想一下卖云雀馅饼的屠户的故事。由于云雀肉很贵, 他决定用马肉混合, 广告云“美味的混合馅饼: 50%云雀肉, 50%马肉”。几天后, 一个顾客说: “奇怪, 你的馅饼并没有多少云雀肉的味道”。“奇怪吗, 女士。但我向你保证混合比例: 一只云雀: 一匹马。” .....

对那个混合比例, 屠户指的是个数 (数目) 比, 而顾客以为是容量 (体积) 比或斤两比。用统计学术语讲, 前者把数目当作权重 (weight) 来说, 而后者把体积当作权重来看。

把这个故事引申一下: 假设屠户所用 1 只云雀的体积是  $2 u^3$ , 而所用 1 匹马的体积是  $9000 u^3$ , 那么这 2 个动物的平均体积是多少? 至少有 2 个答案——数目加权平均体积 (number-weighted mean volume,  $\bar{v}_N$ , 即一般所说的算术平均)、体积加权平均体积 (volume-weighted mean volume,  $\bar{v}_V$ ):

$$\bar{v}_N = [1/(1+1)] \cdot 2 + [1/(1+1)] \cdot 9000 = \frac{2+9000}{2} \approx 4500 u^3$$

$$\bar{v}_V = [2/(2+9000)] \cdot 2 + [9000/(2+9000)] \cdot 9000 = \frac{2^2 + 9000^2}{9002} \approx 9000 u^3$$

式中  $[1/(1+1)]$ 、 $[1/(1+1)]$  分别是云雀、马在数目分布上的权重, 而式中  $[2/(2+9000)]$ 、 $[9000/(2+9000)]$  分别是云雀、马在体积分布上的权重。就  $n$  个粒子 (particles) 而言, 其数目加权平均体积与体积加权平均体积之间的数学关系为<sup>[2]</sup>:

$$\bar{v}_V = (1 + CV^2) \cdot \bar{v}_N$$

式中 CV 是这  $n$  个粒子体积的变异系数 (coefficient of variation), 等于这  $n$  个粒子体积的标准差 (standard deviation) 除以这  $n$  个粒子的数目加权平均体积。

对于细胞核等粒子, 上述两种平均体积都是可反映其平均大小 (尺寸) 的重要参数, 且都可用体视学方法进行无偏 (unbiased) 估计<sup>[2]</sup>。对于不规则结构, 也可从体积加权分布的角度来定义一个重要新参数——星体积 (star volume) 以反映其平均局部大小<sup>[1,3]</sup>, 并用体视学方法无偏估计<sup>[3]</sup>。

### 参考文献

1. Serra J. Image Analysis and Mathematical Morphology. London: Academic Press, 1982, 368.
2. Gundersen HJ, Bagger P, Bendtsen TF, et al. The new stereological tools: disector, fractionator, nucleator and point sampled intercepts and their use in pathological research and diagnosis. APMIS 1988; 96(10): 857-81.
3. Gundersen HJ, Bendtsen TF, Korbo L, et al. Some new, simple and efficient stereological methods and their use in pathological research and diagnosis. APMIS 1988; 96(5): 379-94.